Theorietag in Sarnen



Swiss Olympiad in Informatics
13. Februar 2019



Anleitung

Alle 4 Aufgaben werden auf die Gruppenmitglieder aufgeteilt. (Uniform zufällig.)

Bewertung

Die Präsentation sollte folgende Punkte enthalten:

- 1. Beschreibung der Idee und Erklärung des Algorithmus.
- 2. Beweis, wieso der Algorithmus korrekt ist.
- 3. Analyse der asymptotischen Laufzeit und des asymptotischen Speicherverbrauchs.

Die Bewertung beinhaltet hauptsächlich die Laufzeit und Korrektheit des Algorithmus. Die Qualität der Präsentation wird ebenfalls berücksichtigt.

Du darfst vorgeschriebenen Code zeigen, aber keine sonstigen Notizen. Zur Erklärung steht dir ein leeres Blatt Papier zur Verfügung.

Pro Aufgabe solltest du nicht länger als 10 Minuten benötigen.

Technische Hinweise

Es steht nicht, nach welchen Kriterien du das Programm optimieren musst. Es sollte aber in allen Fällen klar sein, welcher Parameter gemeint ist (z.B. Zahl *n* oder Länge des Eingabestrings).

Du kannst annehmen, dass arithmetische Operationen mit Ganzzahlen in konstanter Zeit berechnet werden können, unabhängig von ihrer Grösse. Die Darstellung einer Zahl benötigt O(1) Speicher.

Fünf Nächte Werwolf

Maus Daniel hat ein neues Spiel erfunden: es heisst fünf Nächte Werwolf. Maus Bibin würde auch gerne mitspielen, aber da gerade der Game Jam läuft, bekommt er nicht sonderlich viel von den Regeln mit. Was er mitbekommt ist:

Am Anfang stehen alle n Mäuse in einer Reihe und haben alle eine verschiedene Geheimzahl von 11 bis n. Alle dürfen höchstens eine Nacht auswählen, bei der sie zu einem beliebigen Platz in der Reihe gehen (und nehmen ihre Geheimzahl mit). Am Ende jeder Nacht werden alle Geheimzahlen (nun in der angepassten Reihenfolge) aufgedeckt und alle Mäuse gehen anschliessend wieder an ihren Ursprungsplatz zurück.

Aufgabenstellung

Du kennst n, die Anzahl der Mäuse und die fünf Sequenzen der Geheimzahlen wie sie am Ende der Nächte waren $a_1, \ldots a_n, b_1, \ldots b_n, \ldots e_1, \ldots, e_n$. Maus Bibin weiss zwar nicht, was genau das Spielziel ist, jedoch will er gerne wissen, was eine mögliche Startaufstellung der Mäuse ist. Hilf ihm eine mögliche Startaufstellung herauszufinden. (Falls es mehrere mögliche Startaufstellungen gibt ist Bibin mit jeder davon zufrieden.)

Beispiel

n = 3, 123; 123; 123; 231 (Antwort: 1 2 3; falls alle Mäuse entschieden haben sich in der letzten Nacht zu bewegen, könnte das die Startposition gewesen sein.)



Brücken

Gegensätzlich zum Glauben von vielen ist Sarnen ein kleiner Ort im Meer, der aus mehreren Inseln besteht. Sie haben herausgefunden, dass es schwierig ist, sich zwischen den Inseln zu bewegen. Daher hat der Bürgermeister Maus Benjamin den Plan, Brücken zu bauen, sodass diese dann alle Inseln miteinander verbinden. Er hat herausgefunden, zwischen welchen Inseln es überhaupt möglich ist, Brücken zu bauen und hat schon ein Angebot von Stofls Brückenbau Unternehmen für die einzelnen Brücken erhalten.

Maus Stefanie hat herausgefunden, dass Maus Benjamin die Brücken in Sugus bezahlen wird und daher will sie auch eine Brücke bauen. Ausserdem gilt

- Maus Benjamin wird die Brücken so auswählen, sodass die total Kosten minimiert werden.
- Niemand weiss, was in Benjamins Kopf vor sich geht: wenn es mehrere Möglichkeiten gibt, die Kosten zu minimieren, wird er eine beliebige davon auswählen.
- Maus Stefanie darf nur für eine Brücke ein Angebot machen.

Aufgabenstellung

Du bekommst, n, die Anzahl Inseln, m, die Anzahl Brücken die gebaut werden können und u_i , v_i , c_i Start und Endpunkt der Brücke resp. die Anzahl Sugus die Stofl für den Bau verlangt. Hilf Maus Stefanie herauszufinden, wie viele Sugus sie sicher bekommen kann, wenn sie ein Angebot für eine Brücke macht.

Beispiel

n = 3, m = 3, 0, 1, 3; 0, 2, 5; 1, 2, 10 (Antwort: 4; Maus Stefanie kann ein Angebot für die Brücke von 0 zu 2 machen für 4 Sugus.)

Fun contest

Maus Johannes hat einen Fun Contest vorbereitet, damit er danach das Lagerhaus dekorieren kann. Er hat sich einen gewurzelten Baum, bestehend aus n Knoten, ausgedacht und diesen den Teilnehmenden verteilt. Die Aufgabe ist nun, alle Blätter farbig anzumalen. Nachdem er die Resultate eingesammelt hat steht er vor dem folgenden Problem: er hat keine Ahnung von Kunst und deshalb weiss er nicht, wie er die Schönheit der Bilder bewerten soll. Daher entscheidet er sich für den folgenden Bewertungsalgorithmus: Für jeden Knoten, dessen Teilbaum paarweise verschieden farbige Blätter hat, bekommt der Teilnehmer einen Punkt.

Maus Elias hat erfahren, wie das Bewertungsschema von Maus Johannes funktioniert und will nun mit seinem Kunstwerk möglichst viele Punkte erzielen. Leider ist er aber recht faul und will nicht allzu viele verschiedene Farben einkaufen. Daher will er zuerst für jede Zahl k mit $1 \le k \le n$ wissen, wie viele verschiedene Farben man braucht, um mindestens k Punkte zu erhalten. Erst dann will er sich entscheiden, wie viele Farben er kaufen will. Leider ist er auch zu faul, dies herauszufinden, also bittet er dich um Hilfe.

Aufgabenstellung

Du kennst n und für $1 \le i \le n-1$ den Vater von Knoten i bezeichnet mit p_i (Knoten 0 ist die Wurzel des Baumes). Für jedes $1 \le k \le n$ finde die Anzahl Farben die Elias braucht, um mindestens k Punkte zu erhalten.

Beispiel

n = 3, $p_1 = 0$, $p_2 = 0$ (Antwort: 1 1 2; Wenn Elias Knoten 1 und 2 gleichfarbig anmalt, bekommt er einen Punkt für Knoten 1 und 2. Damit er den Punkt für Knoten 0 bekommt, muss er Knoten 1 und 2 verschiedenfarbig anmalen und braucht daher 2 Farben. n = 5, $p_1 = 0$, $p_2 = 0$, $p_3 = 2$, $p_4 = 2$ (Antwort: 1 1 1 2 3)

5/6



Aufsteigend

Es sei $D_{n,k}$ eine Liste aller *aufsteigenden* Folgen von n ganzen Zahlen mit Elementen zwischen 1 und k. Zum Beispiel:

$$D_{3,4} = (1,2,3), (1,2,4), (1,3,4), (2,3,4)$$

 $D_{2,5} = (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5), (4,5)$

In jeder List $D_{n,k}$ haben die einzelnen Folgen eine festgelegte Reihenfolge: die *lexiko-graphische* Ordnung. Diese Ordnung wird bei beiden der obigen Beispiele verwendet.

Formal ist die lexikographische Ordnung wie folgt definiert:

Die Folge a_0, \ldots, a_{n-1} ist *lexikographisch kleiner* als die Folge b_0, \ldots, b_{n-1} falls es einen index $j \ge 0$ gibt sodass $a_j < b_j$ und wir für alle i < j haben dass $a_i = b_i$.

Zum Beispiel, (3,7,12) ist lexikographisch kleiner als (3,8,9). Also würde in $D_{3,20}$ die Folge (3,7,12) früher auftreten als (3,8,9). Die Folge (3,7,12) ist auch kleiner als (4,5,6).

Task

Du bekommst n, k, und eine Folge S, welche eine der Folgen in $D_{n,k}$ ist. Deine Aufgabe ist es, den Index von S in $D_{n,k}$ zu finden. (Die erste Folge in $D_{n,k}$ hat den Index 1.) Zum Beispiel, in $D_{3,2}$ ist der Index von (1,2,4) gleich 2 und der Index von (2,3,4) ist 4.

Beispiel

n = 5, k = 8, S = [1, 2, 3, 4, 8] (Antwort: 4; die ersten vier Folgen in $D_{5,8}$ sind (1, 2, 3, 4, 5), (1, 2, 3, 4, 6), (1, 2, 3, 4, 7), und (1, 2, 3, 4, 8)).