

## Cake Protection Agency

Mausland hat mehrere polizeiliche Elite-Einheiten mit unterschiedlichen Einsatzgebieten. Eine der wichtigsten ist sicherlich die CPA, die Kuchenschutzpolizei (*Cake Protection Agency*), die damit beauftragt ist, alle Küchen im Land vor Attacken zu schützen.

Die CPA hat gerade von einem bevorstehenden Angriff eines äusserst gefährlichen Kuchenterroristen, Maus Gehr, erfahren. Anscheinend soll er planen von zu Hause aus zu einem köstlichen Kuchen zu laufen und diesen auf den Boden zu werfen. Die CPA Agenten können ihn nur stoppen, wenn sie entweder strikt früher beim Kuchen sind (und ihn so an einen sichereren Ort bringen können) oder Maus Gehr vorher abfangen können, um ihn festzunehmen. Um Maus Gehr vor dem Kuchen abzufangen, genügt es wenn ein CPA Agent gleichzeitig mit Gehr an einem Ort ist.

Deine Aufgabe ist es nun, den noblen Agenten der CPA zu helfen Kuchenterrorist Gehr zu stoppen.

**Formale Beschreibung** Mausland ist als gerichteter *gewichteter* Graphen  $G = (V, E)$  mit  $n + 3$  Knoten  $V = \{v_{\text{cpa}}, v_{\text{gehr}}, v_{\text{cake}}, v_1, \dots, v_n\}$  gegeben, der Startbasis der CPA Agenten, der Anfangsposition von Maus Gehr, der Position des Kuchens und den verbleibenden Kreuzungen in Mausland. Von jedem Punkt kann man den Kuchen erreichen (not a lie). Eine Kante  $e = (u, v, t) \in E$  verbindet  $u \in V$  zu  $v \in V$  mit der ganzzahligen Fahrzeit  $t \geq 0$ . Merke, dass alle Strassen in Mausland Einbahnstrassen sind; die Kante  $(u, v, t)$  kann also nur gebraucht werden um von  $u$  nach  $v$  zu kommen, aber nicht von  $v$  nach  $u$  (es könnte sein, dass der Graph noch eine weitere Kante  $(v, u, t')$  hat, die dies erlauben würde). Die CPA Agenten können Maus Gehr stoppen, falls entweder einer früher beim Kuchen ist als Maus Gehr oder falls einer zur gleichen Zeit wie Maus Gehr den Knoten  $v \neq v_{\text{cake}}$  betritt.

### Teilaufgabe 1: Späteste Startzeit (15 Punkte)

Maus Gehr war nicht vorsichtig genug und sein geheimer Plan mit der Route  $p = (v_{\text{gehr}}, \dots, v_{\text{cake}})$ , wie er zum Kuchen kommt, sowie seine (ganzzahlige) Startzeit  $T$  wurden den Agenten zugespielt. Beschreibe einen Algorithmus, der die späteste (ganzzahlige) Zeit  $T'$  findet, so dass ein CPA Agent die Position  $v_{\text{cpa}}$  verlässt und Maus Gehr immer noch stoppen kann, in dem er entweder früher beim Kuchen ankommt oder ihn auf dem Weg abfängt (auch gleichzeitig). Gib Argumente warum dein Algorithmus korrekt ist, schreibe Pseudocode und analysiere dessen Laufzeit und Speicherverbrauch.

### Teilaufgabe 2: Beliebig viele Agenten (35 Punkte)

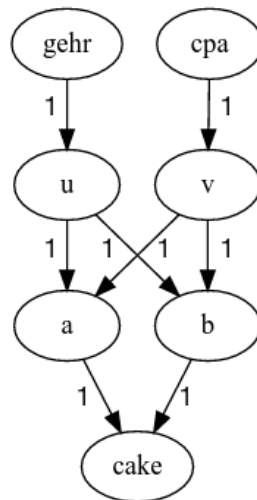
Maus Gehr war nun etwas vorsichtiger und seine Route ist nicht bekannt geworden. Gehe davon aus, dass Maus Gehr seinen Heimknoten zum (ganzzahligen) Zeitpunkt  $T$  verlässt und dass die CPA beliebig viele Agenten aussenden kann. Finde den spätesten (ganzzahligen) Zeitpunkt  $T'$ , wann diese Agenten ausgesandt werden müssen, um



Maus Gehr noch zu stoppen. Gib Argumente warum dein Algorithmus korrekt ist und analysiere die Laufzeit.

Merke, dass Maus Gehr immer weiss wo die CPA Agenten sind und umgekehrt. Desweiteren, falls Maus Gehr und ein CPA Agent zum genau gleichen Zeitpunkt eine Entscheidung treffen müssen (eine ausgehende Kante wählen), dann muss sich Maus Gehr zuerst entscheiden und der CPA Agent weiss dann, welche Kante er genommen hat.

Im folgendem Graphenbeispiel haben alle Kanten Gewicht 1 und dann ist *ein* CPA Agent, der zur gleichen Zeit wie Maus Gehr losgeht, immer in der Lage ihn zu stoppen. Im ersten Schritt wird Maus Gehr zum Knoten  $u$  und der CPA Agent zum Knoten  $v$  gehen. Danach muss sich Maus Gehr zuerst zwischen Knoten  $a$  und  $b$  entscheiden, und der CPA Agent kann seine Wahl einfach nachmachen und ihn so dort ( $a$  oder  $b$ ) festnehmen.



### Teilaufgabe 3: Ein Agent (50 Punkte)

Das Setup sei das gleiche wie in Subtask B, jedoch steht nur ein CPA Agent zur Verfügung. Bestimme wiederum den spätesten (ganzzahligen) Zeitpunkt  $T'$ , wann der CPA Agent die CPA Basis  $v_{\text{cpa}}$  verlassen muss um Maus Gehr noch zu stoppen. Gib Argumente warum dein Algorithmus korrekt ist, schreibe Pseudocode und analysiere die Laufzeit und Speicherverbrauch.